Title	球函数付きの二次形式のテータ級数とモジュラー形式(線型微分方程式の変形理論とアーベル函数論の拡張への新しい視点)
Author(s)	織田, 孝幸
Citation	数理解析研究所講究録 (1980), 388: 170-182
Issue Date	1980-06
URL	http://hdl.handle.net/2433/104906
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
388巻 1980年 170-182

球函数付きの,二次形式のテータ級数とモジュラー形式

北大 理学部 織田孝幸

§0 Hecke – Schoenberg の球函数つきのテータ級数.

(0.1) 今, $\mathcal{O}$ を判別式 D (<0) の虚二次体の全整数環とする. 複素上半平面の点 τ (i.e. $\tau \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Im}\,\tau > 0$) に対し, τ の正則函数 $\vartheta_k(\tau;\mathcal{O};\rho)$ を次の形の無限和で定義する.

$$\vartheta_k(\tau;\mathcal{O};\rho) = \sum_{\substack{\lambda\in\mathcal{O} \\ \lambda\equiv\rho \bmod \sqrt{D}}} \lambda^k e^{2\pi i N(\lambda)\tau}.$$

但し, ここで k は非負整数, $\rho\in\mathcal{O}$, $N(\lambda)$ は λ のノルムである。こういう函数が weight $k+1$ の elliptic modular form になることは, 特別の場合に A. Hurwitz によって知られ, Hecke によって系統的に研究された。

(0.2) おそらくはこういうものから出発して, Hecke の学生であった Schoenberg は次のような一般化を与えた ([4], [5] を見よ).

いま, $Q: \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ を m 変数の正定値実二次形式とせよ さらに Q は lattice $L = \mathbb{Z}^m$ 上で偶整数値をとるとせよ. こ

のときQに関する次数kの調和多項式を次のように定義する．

<u>定義</u>．　$h(x)$を$\mathbb{R}^m$上の多項式とする．hが次の２つの条件を満たすとき，hを次数kの調和多項式という．

(i)　かってな数$\lambda \in \mathbb{R}^\times = \mathbb{R} - \{0\}$に対して

$$h(\lambda \cdot x) = \lambda^k h(x)$$

が成立する．

(ii)　Q^{-1}をQの逆形式とするとき，

$$Q^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) h(x) = 0.$$

但し，ここで$\frac{\partial}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x_m}\right)$．　▲

さて$h(x)$が上のように与えられたとき，上半空間Hの点τに対して，球函数つきの二次形式のテータ函数$\vartheta(\tau; Q; h)$を次のように定める．

<u>定義</u>．

$$\vartheta(\tau; Q; h) = \sum_{l \in L} h(l) \exp[\pi i Q(l) \tau].$$　▲

$\vartheta(\tau; Q; h)$は，Qが正定値であることより収束してH上の正則函数を定める．さてこれについてSchoenbergが得た結果は次のようなものである．今話しを簡単にするためmが偶数の場合に限るとする．

定理. N を Q の level とする。つまり N は NQ^{-1} が L 上偶整数値をとるような最小の正整数とする。$SL_2(\mathbb{Z})$ の部分群 $\Gamma_0(N)$ を $\Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \;\middle|\; c \equiv 0 \mod N \right\}$ で定める。このとき $\vartheta(\tau; Q; h)$ は次の変換則をもつ、

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$ に対して、

$$\vartheta\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}; Q; h\right) = \chi_Q\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)(c\tau+d)^{\frac{m}{2}+k}\vartheta(\tau; Q; h).$$

但し、ここで χ_Q は ± 1 に値をとる Q によって一意に定まる、$\Gamma_0(N)$ のある指標である。 ◢

(0.3) 以下では、この結果二通りの方向に一般化することを考える。

(第一の場合) Q が正定値という条件はそのままで、elliptic modular form でなく、一般の次数の Siegel modular forms をテータ函数で構成することを考える。

(第二の場合) elliptic modular forms を二次形式のテータ函数でつくることを考えるが、Q は不定値とする。特に Q の符号が $(2+, q-)$ のときに重点をおいて考える。

まず第一の場合を問題にする。

まず，主定理を述べるため，調和多項式の一般化を考える．

§(1.1) 調和多項式と主定理．

Q を m 次の実対称正定値行列とする。$M_{n\times m}(\mathbb{R})$ を $n \times m$ 次の実行列全体の空間とする。いま n 次の一般線型群 $GL(n;\mathbb{R})$ の既約多項式表現 (ρ, V) が与えられているとする。但し V は表現空間．

(1.1.1) <u>定義</u>．　$M_{n\times m}(\mathbb{R})$ から V または V の複素化 $V_{\mathbb{C}}$ への多項式写像 $h: M_{n\times m}(\mathbb{R}) \longrightarrow V$ or $V_{\mathbb{C}}$ は次の2つの条件を満すとき次数 ρ の調和多項式と呼ぶ。

(i) (共変性)　任意 $g \in GL(n;\mathbb{R})$ に対して

$$h(g\cdot X) = \rho(g)\cdot h(X)$$

が成立する。

(ii) $X=(x_{ij})$ ($1\leq i\leq n,\ 1\leq j\leq m$) に対し $\frac{\partial}{\partial X} = \left(\frac{\partial}{\partial x_{ij}}\right)$ と置 $n\times n$ の行列 $\left(\frac{\partial}{\partial X}\right)Q^{-1}\,{}^t\!\left(\frac{\partial}{\partial X}\right)$ の成分は2階の微分作用素になる。これを (Δ_{ij}) と置く。明らかに $\Delta_{ij}=\Delta_{ji}$。

このときかってな $V_{\mathbb{C}}^{*} = \mathrm{Hom}(V_{\mathbb{C}}, \mathbb{C})$ の元 v^* に対して

$$\Delta_{ij} < h(X), v^* > = 0 \qquad \forall_{ij}\ (1\leq i,j\leq n)$$

が成立する。　▲

Qをさらに整数行列で，その対角成分が偶数となるものとする。このとき，$L = M_{n\times m}(\mathbb{Z})$，$L^* = M_{n\times m}(\mathbb{Z})\cdot Q^{-1}$と置く。明らかに$L^* \supset L$.

(1.1.2) <u>定義</u>. 表現ρと，それに属する調和多項式$h(X)$と，L^*の元Hとが与えられているとする。このとき

$$\vartheta_\rho(Z;Q,h;H) = \sum_{P\in M_{n\times m}(\mathbb{Z})} \exp[\pi i \operatorname{tr}\{(P+H)Q\,{}^t(P+H)Z\}]\cdot h(P+H)$$

で$\vartheta_\rho(Z;Q,h;H)$を定義する。但しZはn次Siegel上半空間の点。

$\vartheta_\rho(Z;Q,h;H)$はQが正定値ということより収束して，n次Siegel上半空間H_n上の正則な$V_{\mathbb{C}}$に値をとる函数を定める。▲

<u>以下mは偶数とする。</u>

(1.1.3) <u>定理</u>. $\Gamma(N) = \left\{\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}\in Sp(n;\mathbb{Z}) \;\middle|\; \begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}1_n&0\\0&1_n\end{pmatrix} \bmod N\right\}$と，$Sp(n;\mathbb{Z})$の部分群$\Gamma(N)$を定める。但しここでNは$NQ^{-1}$も整数行列で対角成分が偶数となるような最小の正整数。

$\gamma = \begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}\in\Gamma(N)$に対して，$\vartheta_\rho(Z;Q;h;H)$は次の変換則をみたす。

$$\vartheta_\rho(\gamma\cdot Z;Q;h;H) = \det(CZ+D)^{\frac{m}{2}}\rho(CZ+D)\,\vartheta_\rho(Z;Q,h;H).$$

但し$\gamma\cdot Z = (AZ+B)\cdot(CZ+D)^{-1}$. ▲

証明は次の2つの命題（Poissonの和公式，とintertwining property）を使う。

§ (1.2) Weil 表現

Qを次数がmの正定値実対称行列とする。群 $Sp(n;\mathbb{R})$ の生成元 $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & {}^tA^{-1} \end{pmatrix}$ $(A \in GL(n;\mathbb{R}))$, $\begin{pmatrix} 1_n & B \\ 0 & 1_n \end{pmatrix}$ $(B = {}^tB \in M_n(\mathbb{R}))$, $\begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{pmatrix}$ に対して $L^2(M_{n\times m}(\mathbb{R}))$ 上の unitary operator $w_Q(*)$ を次のように定義する。

(1.2.1) <u>定義</u>. Schwartz-Bruhat functions $\mathcal{S}(M_{n\times m}(\mathbb{R}))$ の元 $f(X)$ に対して

$$\begin{cases} [w_Q(\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & {}^tA^{-1} \end{pmatrix})f](X) = (\det A)^{\frac{m}{2}} \cdot f({}^tA \cdot X) \\ [w_Q(\begin{pmatrix} 1_n & B \\ 0 & 1_n \end{pmatrix})f](X) = \exp[\pi i \,\mathrm{tr}(XQ{}^tX \cdot B)] \cdot f(X) \\ [w_Q(\begin{pmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{pmatrix})f](X) = i^{\frac{mn}{2}} (\det Q)^{\frac{n}{2}} \displaystyle\int_{M_{n\times m}(\mathbb{R})} \exp[2\pi i \,\mathrm{tr}(XQ{}^tY)] \cdot f(Y)\, dY. \end{cases}$$

と置く。但し $Y = (y_{ij})$ $(1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m)$ とするとき $dY = \prod_{i,j} dy_{ij}$ とおいた。 ▲

Saito [1] の結果によって, w_Q は $Sp(n,\mathbb{R})$ に表現になることが m が偶数の場合に証明されている。これを Q の Weil 表現と呼ぶことにする。

Q をさらに偶整数行列とする。つまり Q の対角成分は偶整数で, 他は整数となる行列とする。 $L = M_{n\times m}(\mathbb{Z})$, と $L^* = M_{n\times m}(\mathbb{Z}) \cdot Q^{-1}$ とは $M_{n\times m}(\mathbb{R})$ の lattice で $L^* \supset L$ となる。

(1.2.2) <u>定義</u>. $f \in \mathcal{S}(M_{n\times m}(\mathbb{R}))$ に対して

$$\theta(f;H) = \sum_{\ell \in L} f(L+H)$$

と置く。但し H は L^* の元。▲

Shintani [2] の結果によって次の命題を得る。

(1.2.3). <u>命題</u>. $\gamma \in \Gamma(N)$ とするとき、かってな f に対して

$$\theta(W_Q(\gamma)f;H) = \theta(f;H)$$

が成立する。▲

これを Poisson の和公式とよぶ。

$V_{\mathbb{C}}$ に値をとる Schwartz-Bruhat function 全体を $\mathcal{S}(M_{n\times m}(\mathbb{R});V_{\mathbb{C}})$ と書く。明らかに $\mathcal{S}(M_{n\times m}(\mathbb{R});V_{\mathbb{C}}) = \mathcal{S}(M_{n\times m}(\mathbb{R}))\otimes V_{\mathbb{C}}$. Tensor 積によって Weil 表現 W_Q を $\mathcal{S}(M_{n\times m}(\mathbb{R});V_{\mathbb{C}})$ 上の表現と考える。簡単な考察により次の命題を得る。

(1.2.4) <u>命題</u>. (Intertwining property)

$h(X)$ を次数 ρ の調和多項とする。$Z \in H_n$ に対して

$$f(X;Z) = \exp[\pi i\, \mathrm{tr}(XQ\,{}^tXZ)]\, h(X)$$

と置く。$f \in \mathcal{S}(M_{n\times m}(\mathbb{R});V_{\mathbb{C}})$ で f は次の性質をもつ。

任意の元 $g \in Sp(n;\mathbb{R})$ (但し $g = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$) に対して,

$$[W_Q(g)f](X;Z) = \det(CX+D)^{-\frac{m}{2}} \cdot \rho(CZ+D)^{-1} \cdot f(X;(AZ+B)(CZ+D)^{-1})$$

が成立する。▲

命題(1.2.3)と命題(1.2.4)により定理(1.1.3)が従う。

§2　第二の場合を考えよう。

(2.1)　Qを$\mathbb{R}^m$上定義された付号$(p+, q-)$ $(p+q=m)$の二次形式とする。$\mathbb{Z}^m$上でQは偶整数値をとると仮定する。mは簡単のため偶数とする。さらに幾何的な側面に話しを限って、$p=2,\ q=n-2$の場合を考える。

(2.2)　$SL_2(\mathbb{R})$のWeil表現W_Qを次のように生成元ごとに定義する。　$f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)=\{\mathbb{R}^m$上のSchwartz Bruhat functions$\}$に対して

$$\begin{cases} [W_Q(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix})f](x)=a^{\frac{m}{2}}f(ax), & (a\in\mathbb{R}^\times, x\in\mathbb{R}^m), \\ [W_Q(\begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1\end{pmatrix})f](x)=\exp[\pi i\,Q(x)b]\cdot f(x) & (b\in\mathbb{R}), \\ [W_Q(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix})f](x)=i^{\frac{1}{2}(2-q)}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^m}\exp[2\pi i(x,y)_Q]\cdot f(y)\,dy & \end{cases}$$

但し$(x,y)_Q$はQに付随する双一次形式, i.e.

$$(x,y)_Q \underset{\text{defn.}}{=} \frac{1}{2}Q(x+y)-\frac{1}{2}Q(x)-\frac{1}{2}Q(y).$$

[1]の結果によって，mが偶数であるからW_Qは$SL_2(\mathbb{R})$の表現となる。

(2.3) $\mathbb{C}^m$ の部分集合 $\widetilde{\mathcal{D}}$ を次のように定める。

$$\widetilde{\mathcal{D}} = \{\xi = (\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{m-1}) \in \mathbb{C}^m \mid Q(\xi) = 0 \quad (\xi, \bar{\xi})_Q > 0\}.$$

明らかに、$\widetilde{\mathcal{D}} \ni 0$。また $\xi \in \widetilde{\mathcal{D}}$ ならば $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ とするとき、$\lambda\xi \in \widetilde{\mathcal{D}}$.

$\pi : \mathbb{C}^m - \{0\} \longrightarrow P_{\mathbb{C}}^{m-1}$ を射影空間 $P_{\mathbb{C}}^{m-1}$ への自然な写像とする。π の $\widetilde{\mathcal{D}}$ への制限は $\widetilde{\mathcal{D}} \longrightarrow \pi(\widetilde{\mathcal{D}})$ なる $P_{\mathbb{C}}^1$-bundleを与える。$\pi(\widetilde{\mathcal{D}})$ を $\mathcal{D}$ と書く。$\mathcal{D}$ は BD-type の対称空間になる。

(2.4) $\mathcal{D}$ の点は Q の Hermite の minimal majorant R と次のように対応する。まず $\mathcal{D}$ は2つの連結成分からなる。それを、$\mathcal{D}_+$, $\mathcal{D}_-$ と書く。$\mathcal{D} = \mathcal{D}_+ \cup \mathcal{D}_-$ で $\overline{\mathcal{D}_+} = \mathcal{D}_-$ である。

いま R に対応する双一次形式を $(\ ,\ )_R$ と書く。$\mathbb{C}^m$ の元 ξ ですべての $\eta \in \mathbb{C}^m$ に対して $(\xi, \eta)_Q = (\xi, \eta)_R$ となる ξ は $\mathbb{C}^m$ の2次元の部分空間を定める。したがって、これは $P_{\mathbb{C}}^{m-1}$ の直線を定める。Bezout の定理によってこの直線と $Q(\xi) = 0$ で定する $P_{\mathbb{C}}^{m-1}$ の2次超曲面とは2点で交わる。簡単な計算によってこの2点は各々1点ずつ $\mathcal{D}_+$ と $\mathcal{D}_-$ とに属することがわかる。

この点を $\xi_+(R)$, $\xi_-(R)$ と書く。逆の対応もできて、ξ_+ or ξ_- から定まる R を $R(\xi_+)$ または $R(\xi_-)$ と書く。

(2.5) Q とその minimal majorant R を固定する。$z = u + iv$ を上半平面の点とする ($v > 0$)。$\tilde{\xi} \in \widetilde{\mathcal{D}}$ を $R = R(\pi(\tilde{\xi}))$ となるように

とってくる。　このとき

$$f_k(x;z;Q,R) = v^{\frac{q}{2}}(\tilde{\xi},x)_Q^k \exp[\pi i\{Q(x)u + iR(x)v\}]$$

とおく。　すると $f_k(x;z;Q;R)$ は次の intertwining property をもつ。

(2.5.1)　$g \in SL_2(\mathbb{R})$ $\left(g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)$ に対して

$$[w_Q(g) f_k](x;z;Q,k) = \det(cz+d)^{\left(\frac{2-q}{2}+k\right)} f_k\left(x;\frac{az+b}{cz+d};Q;R\right).$$

(2.6)　R も $\tilde{\xi}$ によって決まるから $R = R_{\tilde{\xi}}$ と書く。このとき

(2.6.1) 定義　　$z = u+iv$ $(v>0)$ とする。

$$\theta_k(z;\tilde{\xi};Q) = \sum_{l \in \mathbb{Z}^m} v^{\frac{q}{2}} (\tilde{\xi},l)_Q^k \exp[\pi i\{Q(l)u + iR_{\xi}(l)v\}].$$

で $\theta_k(z;\tilde{\xi};Q)$ を定義する。

(2.6.2) 定理　　$\theta_k(z;\tilde{\xi};Q)$ は次の変換則をもつ。

$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z})$，$c \equiv 0 \bmod N$ に対して

$$\theta_k\left(\frac{az+b}{cz+d};\tilde{\xi};Q\right) = (\operatorname{sgn} a)^{\frac{2-q}{2}} \left(\frac{(-1)^{\frac{2-q}{2}} \operatorname{dis} Q}{|a|}\right)(cz+d)^{\left(k+\frac{2-q}{2}\right)} \theta_k(z;\tilde{\xi};Q).$$

但し $\operatorname{dis} Q$ は Q の discriminant.

(2.6.3) 注意　$\theta_k(z;\tilde{\xi};Q)$ は z については weight $k+\frac{2-q}{2}$ の，$\Gamma_0(N)$ に属し character χ_Q （χ_Q は上で与えた character）の保型形式のようにふるまうが，z について正則でない。

(2.7)　主定理を述べる．[3]の結果を改良する．

(2.7.1)　いま $\Delta_Q = (-1)^{\frac{2-q}{2}} \det Q$ とおく（仮定より，q は even だから $\det Q > 0$）．
群 $\Gamma_0(N)$ の character χ_Q を

$$\chi_Q\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = (\operatorname{sgn} a)^{\frac{2-q}{2}} \left(\frac{\Delta_Q}{|a|}\right)$$

と定める．但しここで $\left(\frac{*}{*}\right)$ は平方剰余記号．

(2.7.2)（第1主定理）　$f(z)$ を $\Gamma_0(N)$ に属する，weight $k+\frac{2-q}{2}$，multiplicator χ_Q の正則な elliptic modular cusp form とする．このとき $k \geqq q$ のとき積分

$$\Phi_f(\xi) = \int_{\Gamma_0(N)\backslash H} \overline{\theta_k(z;\xi;Q)} \cdot f(z) \cdot y^{k+\frac{2-q}{2}} \cdot \frac{dx\,dy}{y^2}$$

は条件収束して，$\Phi_f(\xi)$ は $\mathfrak{X}$ 上の正則函数で次の条件をみたす．

(i)　$\lambda \in \mathbb{C}^\times$ に対して　$\Phi_f(\lambda\cdot\xi) = \lambda^{-k}\Phi_f(\xi)$．

(ii)　γ を $\mathbb{R}^m$ の一次変換で $\mathbb{Z}^m$ を $\mathbb{Z}^m$ に1対1にうつし，さらに2次形式 Q を不変に保つとする（i.e. γ は Q の単数）．このとき

$$\Phi_f(\gamma\cdot\xi) = \Phi_f(\xi).$$

(2.7.3) <u>定義</u>　一般に $\mathcal{D}$ 上の正則函数で 上の (i), (ii) の条件をみたすものを G の単数群 Γ_Q に属する, weight k の正則保型形式という.

(2.8)　<u>定理</u> (2.7.2) の解釈

$k=g$ とせよ。すると weight $\frac{g}{2}+1$ の elliptic cusp form f に, weight g の $\mathcal{D}$ 上の holomorphic modular form Φ_f が対応する.

Deligne によって f には weight $\frac{g}{2}$ の l-adic representation と type $\{(\frac{g}{2},0),(0,\frac{g}{2})\}$ の Hodge structure が付随する. f は Hecke operators の eigen form で New form とすると, これらは rank 2 になる.

さて今 f は Hecke operators の eigen form のとき Φ_f もそうであると仮定する. Φ_f にも l-adic representation と Hodge structure を attach できる. f に attach した l-adic representation を $V_l(f)$, Hodge structure を $H(f)$ と書き, Φ_f の対応するものも同様に書く

(2.8.1) <u>予想</u> (定理 (2.7.2) の解釈)

$$V_l(f)\otimes V_l(f) \hookrightarrow V_l(\Phi_f),$$
$$H(f)\otimes H(f) \hookrightarrow H(\Phi_f).$$

(2.8.2) <u>注意</u>　$g=2$ のときは evidence がある. $g=\mathrm{odd}$ の場合も同様の予想を定式化するのはむずかしくない.

Reference.

1. Saito, M.: Représentations unitaires des groupes symplectiques. J. Math. Soc. of Japan 24, 232–251 (1972)

2. Shintani, T.: On construction of holomorphic cusp forms of half integral weight. Nagoya Math. J. Vol. 58, 83–126, (1975)

3. Oda, T.: On modular forms associated with indefinite quadratic forms of signature (2, n−2). Math. Ann. 231, 97–144 (1977)

4. Hecke, E.: Analytische Arithmetik der Positiven Quadratischen Formen. Hecke 全集, 最後から二番目の論文.

5. Schoeneberg, B.: Das Verhalten von mehrfachen Thetareihen bei Modulsubstitutionen. Math. Ann. 116, 511–523 (1939)